Cuprins

Algebră

Analiză matematică

Algebră

· Permutări
· Matrice
· Determinanţi
· Matrice şi determinanţi, matrice inversabile, ecuaţii matriceale, rangul unei matrice. Polinom caracteristic al unei matrice
· Sisteme de ecuaţii liniare
· Exerciţii recapitulative
· Probleme date la examenele de bacalaureat din anii anteriori
· Exerciţii şi probleme în vederea pregătirii concursurilor şi olimpiadelor de matematică

Capitolul 1

Permutări

1. Să se determine numărul de inversiuni şi semnul pentru următoarele permutări:

a) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\varphi \in S_4$;

b) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau \in S_5$;

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma \in S_6$;

d) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\varphi \in S_7$;

e) $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$, $\theta \in S_{2n}$;

f) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n & 2n-1 & 2n-3 & \dots & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma \in S_{2n}$.

2. Să se determine i şi j astfel încât:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & i & 8 & 5 & 7 & 6 & j & 2 \end{pmatrix}$ să fie o permutare impară, $\sigma \in S_8$;

b) $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ i & 1 & 2 & 3 & 4 & j & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ să fie o permutare pară, $\theta \in S_9$.

3. Fie permutările $\sigma, \tau, \theta \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze:

a) $\tau \circ \sigma \circ \theta$; b) $(\sigma\,\tau)\,\theta$; c) $\sigma\,(\tau\,\theta)$; d) σ^2; e) τ^3.

4. Să se scrie inversele următoarelor permutări:

a) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\varphi \in S_5$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\sigma \in S_8$.

5. Fie permutările σ, τ, θ ∈ S_4.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice egalitatea $(\sigma\,\tau)\,\theta = \sigma\,(\tau\,\theta)$.

b) Să se scrie σ^{-1}, τ^{-1}, θ^{-1}, $(\tau\theta)^{-1}$ şi să se arate că $(\tau\,\theta)^{-1} = \theta^{-1}\cdot\tau^{-1}$.

c) Să se verifice dacă $\sigma\cdot\tau\cdot\theta = \theta\cdot\tau\cdot 5$.

6. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\tau\,x = \sigma$; b) $\sigma^2\,x = \tau$; c) $x\,\tau^3 = \sigma$; d) $\tau\,x\,\sigma = \sigma\,\tau$.

7. Să se rezolve în S_4 ecuaţiile $x^2 = \sigma$, dacă:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Să se arate că ∀ $\sigma \in S_n$, există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p = e$. Aplicaţie pentru $\sigma \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9. Fie $H \in S_n$, $H \neq \Phi$ şi având proprietatea că ∀ $\sigma, \tau \in H$, rezultă că $\sigma\,\tau \in H$. Să se arate că $e \in H$ şi că dacă $\tau \in H$, atunci $\tau^{-1} \in H$.

10.* a) Dacă $\sigma \in S_n$ atunci $\varepsilon(\sigma) = \prod\limits_{1\le i<j\le n} \dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$.

b) Dacă $\sigma, \tau \in S_n$ atunci $\varepsilon(\sigma\,\tau) = \varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\tau)$.

c) Să se verifice a) şi b) pentru $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

11.* Să se arate că mulţimea S_n conţine $\dfrac{n!}{2}$ permutări pare şi $\dfrac{n!}{2}$ permutări impare.

12.* Pentru orice permutare $\sigma \in S_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, definim permutarea $\overline{\sigma} \in S_n$ astfel încât $\overline{\sigma}(i) = \sigma(n - i + 1)$, ∀ $i = \overline{1,n}$.

a) Să se arate că $m(\sigma) + m(\overline{\sigma}) = C_n^2$, ∀ $\sigma \in S_n$.

b) Să se calculeze $\sum\limits_{\sigma\in S_n} m(\sigma)$.

13. Să se scrie ca produs de transpoziţii (schimbări de poziţie) următoarele permutări:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Să se arate că orice permutare pară (respectiv impară) este un produs de un număr par (respectiv impar) de transpoziţii.

15. Fie $\sigma \in S_n$ $(n \geq 3)$ astfel încât $\sigma\tau = \tau\sigma$, ∀ $\tau \in S_n$. Să se atare că $\sigma = e$.

Capitolul 2

Matrice

1. Să se precizeze care dintre următoarele matrice sunt matrice simetrice, antisimetrice, superior (inferior) triunghiulare, strict superior triunghiulare, diagonale, scalare, matrice de permutare, matrice conjugate.

a) $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & i \\ \sqrt{3} & 0 & -\pi \\ -i & \pi & 0 \end{pmatrix}$;

c) $C \in \mathscr{M}_4(\mathbb{Z})$, $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$;

d) $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{Z})$, $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

e) $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;

f) $S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $\quad S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$;

g) $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $D = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & -i \\ \sqrt{3} & 0 & -\pi \\ i & \pi & 0 \end{pmatrix}$;

h) $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{N})$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

i) $A = (a_{ij})$, unde $a_{ij} = \max(i, j)$; $i, j = \overline{1, n}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

j) $B = (b_{ij})$, unde $b_{ij} = i - j$; $i, j = \overline{1, n}$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

k) $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ dacă $a_{ij} = |\, i - j \,|$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Să se determine numărul de matrice din următoarele mulţimi:

a) $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \right\}$;

b) $\mathcal{M}_{3,\,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\} \right\}$;

c) $\mathcal{M}_3 = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in \{-1, 1\}, \forall\, i, j = \overline{1,3}\,\}$

d) $\mathcal{M}_{m,\,n}(F)$ – mulţimea tuturor matricelor de tipul (m, n) având ca elemente numere din mulţimea F, ştiind că $|F| = p$ (cardinalul lui F).

3. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{C}$ astfel încât să avem următoarele egalităţi de matrice:

a) $\begin{pmatrix} 1 - x & 3x + y & 2 \\ x & y - x & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & x + 4y & y \\ 1 + y & -1 & x + y \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2x & 3y - x \\ i + x & z \\ y + z & 2ix - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & y - z \\ (1 + i)^2 & x - 2y \\ -x & 2x^2 + 3x \end{pmatrix}$;

4. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_{2,\,3}(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 2i & -3 & 1 + i \\ 1 - i & 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 2i & 0 & -i \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 - 4i & 1 \\ 3i & -i & 2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze:

a) $(A + B) + C$; b) $A + (B - C)$; c) $(A + (-B)) + (-C)$.

Analiză matematică

• Inegalităţi clasice. Mulţimi. Funcţii. Ecuaţii. Inecuaţii
• Şiruri
• Limite de funcţii
• Continuitatea funcţiilor
• Derivabilitatea funcţiilor
• Grafice de funcţii
• Teste recapitulative. Exerciţii şi probleme pentru pregătirea examenului de bacalaureat
• Exerciţii şi probleme în sprijinul pregătirii concursurilor şi olimpiadelor de matematică

Capitolul 1

Inegalități clasice. Mulțimi. Funcții. Ecuații. Inecuații

I. Numere reale. Inegalități clasice (forma discretă)

Teoremă: Media aritmetică a n numere strict pozitive, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, este mai mare sau egală cu media lor geometrică: $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz

Teoremă: Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, numere reale, atunci $(a_1b_1 + a_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$.

Inegalitatea lui Hölder

Teoremă: Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$, $n \geq 2$ şi $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci are loc inegalitatea: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Inegalitatea lui Minkovski

Teoremă: Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$, $n \geq 2$ şi p un număr real cu $p > 1$, atunci are loc inegalitatea: $\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Inegalitatea lui Cebâsev

Teoremă: a) Dacă $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ (în principiu seturile de numere trebuie să aibă aceeaşi monotonie), atunci $n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$.

b) Dacă mulțimile de numere nu au aceeaşi monotonie inegalitatea devine:

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

Inegalitatea lui Jensen

Definiție. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este interval. Vom spune că f este convexă (concavă) pe I dacă $\forall\ x_1, x_2 \in I$ şi $\forall\ t \in [0, 1]$, avem: $f\,[t\,x_1 + (1-t)x_2] \underset{\geq}{\leq} t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_2)$.

Teoremă: a) Fie $f : I \to \mathbb{R}$. Atunci f este convexă pe $I \Leftrightarrow \forall\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ şi $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in [0, 1]$ cu $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, atunci: $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$.

b) Dacă f este concavă pe I, atunci avem: $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$.

Aplicații 1

1. Să se arate că $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ avem: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

2. Să se arate că $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ avem: $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{2n-1}{n}$.

3. Să se arate că $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ avem:

a) $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$.

b) $n^{\frac{n}{2}} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

c) $\sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

d) $2^n + 1 < 2^{n+\frac{1}{2^{n-1}}}$.

e) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{2}{n^2}$.

f) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$, ($k \leq n$ n fixat).

4. Fie $a, b \in (0, +\infty)$ şi $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \in \mathbb{Q}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, atunci $a = b = 1$.

5. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ şi $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$ atunci avem:

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n} \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

6. Să se arate că dacă $a_i \in \mathbb{N}^*$ ($i = \overline{1-n}$), atunci avem:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

7. Să se arate că dacă $n, p \in \mathbb{N}^*$ şi $\left\{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right\} = \left\{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}\right\}$, atunci $n = p$.

Aplicații 2

1. Să se arate că $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$, avem:

$(a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot a)(a \cdot b^2 + b \cdot c^2 + c \cdot \text{a}.^2) \leq (a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4)$.

2. Să se arate că $\forall\ a, b, c \geq 0$, avem: $(a + b + c)(ab + bc + ac) \geq 9\,abc$.

3. Să se arate că $\forall\ a, b, c > 0$ avem: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$.

4. Să se arate că $\forall\ a, b, c > 0$ avem: $\dfrac{a^2(b-c)}{c} + \dfrac{b^2(c-a)}{a} + \dfrac{c^2(a-b)}{b} \geq 0$.

5. Să se arate că $\forall\ a, b, c > 0$ avem: $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$.

6. Să se arate că $\forall\ a, b, c > 0$ avem:

$$\frac{1}{a}(b + c - a)^3 + \frac{1}{b}(a + c - b)^3 + \frac{1}{c}(a + b - c) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

7. Să se arate că $\forall\ a, b, c > 0$ avem: $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{a+c} + \dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{a+b+c}{2}$.

8. Să se arate că $\forall\ a, b, c > 0$ avem: $(a + b + c)\sum \dfrac{a}{(2a + b + c)(b + c)} \geq \dfrac{9}{8}$.

9. Să se arate că $\forall\ a, b, c > 0$ avem: $\sum \dfrac{a^3 + abc}{b + c} \geq \text{ab} + bc + ac$.

10. Să se arate că $\forall\ a, b, c > 0$ pentru care $abc = 1$, avem: $\sum \dfrac{1}{a^3(b+c)} \geq \dfrac{3}{2}$.

A. Mulțimi

(Exercițiile marcate cu steluță sunt recomandate pentru orele opționale sau cercurile de pregătire)

Exerciții referitoare la principalele operații cu mulțimi:

1. $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.

2. $A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B$.

3. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

4. $A \subset B$ și $C \subset D \Rightarrow A \setminus D \subset B \setminus C$.

5. $A \,\Delta\, (A \,\Delta\, B) = B$.

6. $A \,\Delta\, B = A \,\Delta\, C \Rightarrow B = C$.

7. $A \,\Delta\, B = C \,\Delta\, B \Rightarrow A = C$.

8. Dacă $C \neq \varnothing$, atunci $A \times C \subset B \times C \Rightarrow A \subset B$.

9. Dacă $C \neq \varnothing$, atunci $C \times A \subset C \times B \Rightarrow A \subset B$.

10*. $(A \times C) \setminus (C \times D) = [(A - C) \times B] \cup [A \times (B \setminus D)]$.

11. Determinați mulțimea $A \subset R$ pentru care funcția:

$$f : \mathbb{R} \to A, f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x + 1} \text{ este surjectivă?}$$

12. Se consideră mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{Z}_+^* \mid \frac{x^2}{2x+1}\}$; $B = \{y \in \mathbb{Z}_+^* \mid \frac{y^2}{3y+1}\}$

a) Să se analizeze dacă în mulțimile A şi B există elemente comune.

b) Să se determine $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A \subset \mathbb{Z}$ şi $B \subset \mathbb{Z}$.

13*. Să se determine mulțimea: $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}\}$.

14. Să se arate că $\sqrt[3]{2} \notin \{a + b\sqrt{r} \mid a, b\, r \in \mathbb{Q}\}$.

15. Să se determine mulțimea:

$x \in \mathbb{Q} \mid$ există $y \in \mathbb{Q}$ astfel încât $5x^2 - 3x + 16 = y^2\}$.

16. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$.

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât: $I_{mf} = [-3, 5]$.

17*. Să se determine mulțimea: $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ şi $z = \sqrt{x^2 - x + 1} \in \mathbb{Z}\}$.

18*. Fie $a_0 \in \mathbb{N}$ şi mulțimea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,\}$ unde $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

1) Să se arate că $A \setminus \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

2) Să se arate că mulțimea $A \setminus \mathbb{Q}$ este o mulțime infinită.

19*. Fie $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$ numere naturale. Fie $a \in \mathbb{N}$. Pentru orice număr natural k notăm: $A_k = \{a + r_k \cdot m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Să se arate că mulțimile A_k $(k \geq 1)$ nu au nici un element comun.

20. Să se arate că: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1}, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\right\} = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

21. Să se arate că dacă $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, atunci: $\left\{x^n + \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \subset \mathbb{Z}$.

22*. Fie mulțimile: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y - 1 = 0\}$;

$B = (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^3 + y^3 - 2x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 2y - 1 = 0\}$.

Să se determine:

a) $A \setminus B$;

b) $B \setminus A$.

B. Funcția caracteristică a unei mulțimi

(Este recomandată pentru orele opționale sau cercurile de pregătire)

Definiție. Fie U o mulțime totală şi $\mathcal{P}(U)$ mulțimea tuturor părților mulțimii U. Fie $A \in \mathcal{P}(U)$ pe mulțimea A vom defini funcția $f_A : U \to \{0, 1\}$,

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \notin A \end{cases}.$$